

9 класс. Шәһәр туры.

1. Алты урынлы сан 2 цифрыннан башлана. Әгәр бу цифрны санның ахырына күчерсәк, табылган сан баштагысыннан өч тапкыр зуррак булчак. Санны табыгыз. (10 балл)

Чишү. *Решение.* Пусть $\overline{2abcde}$ – искомое шестизначное число. Тогда по условию будем иметь $\overline{abcde2} = 3 \cdot \overline{2abcde}$. Если обозначить $\overline{abcde} = x$, то получим уравнение

$$10x + 2 = 3 \cdot (2 \cdot 10^5 + x),$$

или $7x = 6 \cdot 10^5 - 2$, откуда находим $x = 85714$. Следовательно, исходное число будет равно 285714.

Ответ. 285714.

2. $a + b + c = 1$ булсын. $a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{1}{3}$ икәннен исбатлагыз. (10 балл)

Чишү. $1 = (a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc \leq a^2 + b^2 + c^2 + (a^2 + b^2) + (a^2 + c^2) + (b^2 + c^2) = 3(a^2 + b^2 + c^2)$. (Здесь мы воспользовались очевидным неравенством $x^2 + y^2 \geq 2xy$). В результате получаем $a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{1}{3}$.

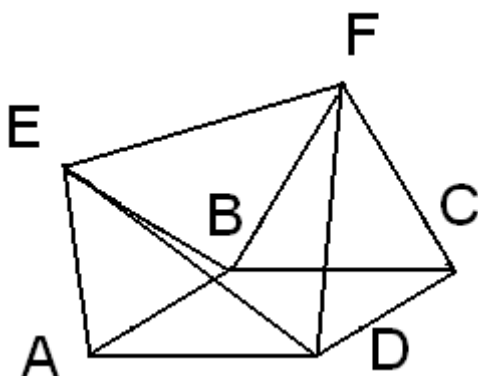
3. Тигезләмәне чишегез. $\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 7\left(x - \frac{1}{x}\right) + 10 = 0$. (10 балл)

Чишү. Введем новое неизвестное $x - \frac{1}{x} = t$. Тогда данное уравнение

примет вид $t^2 + 7t + 12 = 0$. Квадратное уравнение имеет корни $t_1 = -4$, $t_2 = -3$. Следовательно, исходное уравнение равносильно совокупности уравнений

$$\begin{cases} x - \frac{1}{x} = -4, \\ x - \frac{1}{x} = -3. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \pm \sqrt{5}, \\ x = \frac{-3 \pm \sqrt{13}}{2}. \end{cases}$$

4. $ABCD$ параллелограммының ике чиктәш AB һәм BC якларында, параллелограммның тышында тигезяклы ABE һәм BCF өчпочмаклары төзелгән. DEF өчпочмагының тигезяклы икәннен исбатлагыз. (10 балл)
Чишү.



$EA = AB = DC$, $AD = BC = CF$, $\angle EAD = \angle BAD + \angle EAB = \angle BAD + 60^\circ$, $\angle DCF = \angle DCB + \angle BCF = \angle DCB + 60^\circ$, так как $\angle BAD = \angle DCB$, то $\angle EAD = \angle DCF$. Отсюда следует, что треугольники DAE и FCD равны, значит $ED = DF$.

Далее, $EA = EB$, $AD = BC = BF$, $\angle EBF = 360^\circ - \angle EBA - \angle FBC - \angle ABC = 360^\circ - 60^\circ - 60^\circ - (180^\circ - \angle BAD) = 60^\circ + \angle BAD$. Отсюда следует, что треугольники DAE и FBE равны, значит $ED = EF$. Таким образом, $ED = DF = EF$, то есть треугольник DEF равносторонний, что и требовалось доказать.

5. Математика буенча олимпиадада 20 укучы катнашкан. Теләсә кайсы 10 укучы арасында бер малай һәм теләсә кайсы 12 укучы арасында бер кыз бар икәнне билгеле. Олимпиадада ничә кыз һәм ничә малай катнашкан? Җавапны аңлатыгыз. (10 балл)

Чишү. Пусть в олимпиаде участвовало x мальчиков, тогда девочек-участниц было $20-x$. По условию задачи $x \leq 11$, иначе нарушается требование, что среди любых 12 участников есть хотя бы одна девочка.

Аналогично, $20 - x \leq 9$, то есть $x \geq 11$. Следовательно, на математической олимпиаде было 11 мальчиков и 9 девочек.

Ответ. 11 мальчиков и 9 девочек.